Neue Theoreme zur Lehre von den bestimmten Integralen.

Von Dr. **Anton Winckler,**

Professor der praktischen Geometrie und des Situations-Zeichnens an der k. k. technischen Lehranstalt zu Brünn.

(Vorgelegt von Herrn Prof. Petzval.)

Die Theorie der bestimmten Integrale, welche seit Euler's berühmten Arbeiten mit den interessantesten Resultaten bereichert worden ist, wird wegen der Wichtigkeit derselben bei Untersuchungen über Gegenstände der Physik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung etc., — wegen ihrer eigenthümlichen Betrachtungsweise und als natürliche Weiterentwickelung der Theorie der Functionen, für den Mathematiker stets ein ausgezeichnetes Interesse behalten. Wenn die Vermehrung der ohnehin schon sehr zahlreichen Einzelheiten, welchen man auf diesem Gebiete begegnet, ohne Zweifel fortan wünschenswerth bleibt, so gilt dies in noch höherem Grade von dem Streben nach Verallgemeinerung, wodurch oft eine Reihe isolirt stehender Resultate auf eine gemeinschaftliche Quelle zurückgeführt werden und dann in sehr allgemeinen Theoremen ihren gemeinsamen Ausdruck finden. Eines der schönsten Beispiele für diesen Entwickelungsgang bilden die Integrale, welche man nach dem Vorschlage Legendre's die Euler'schen nennt, und welche neben der hervorragenden Rolle, die sie in praktischen Untersuchungen spielen, sich in theoretischer Hinsicht durch sehr merkwürdige, in stets grösserer Allgemeinheit hervortretende Eigenschaften auszeichnen, darum auch der vorzüglichen Sorgfalt werth erscheinen, womit sie unausgesetzt von fast allen neueren Geometern untersucht worden sind. Ungeachtet dieser vielseitigen Durchforschung bieten jene Euler'schen Integrale der Betrachtung immer wieder neue Gesichtspunkte dar, welche weiter verfolgt, auch zu neuen Resultaten und theilweise zu Sätzen führen, welche an Allgemeinheit die bisher bekannten übertreffen. Um in dieser Hinsicht nur Eines hervorzuheben, wurde das Euler'sche Integral zweiter Art (die sogenannte

Gammafunction) für complexe Werthe des Arguments bis dahin einer ausführlichern Untersuchung nicht unterzogen, obgleich die entsprechenden Integrale nicht selten auftreten und nicht minder interessante Eigenschaften als die den Gammafunctionen zukommenden besitzen.

Mit der Begründung von Resultaten bezeichneter Art wird sich die vorliegende Arbeit beschäftigen, wobei es nicht unterlassen werden soll, Resultate, welche der Betrachtung zu Grunde gelegt werden oder gelegentlich aus neuen sich ergeben, und welche meines Wissens bereits bekannt sind, in jedem einzelnen Falle als solche zu bezeichnen.

Wenden wir uns zur Sache.

1.

Wenn die beiden Ausdrücke

$$\psi_{(x)} \text{ und } F_{(x,b)} - F_{(x,a)}$$

für einen zwischen den Grenzen α und β liegenden Werth von x sich auf Null reduciren, ohne dass ihr Verhältniss:

$$\frac{F_{(x,b)} - F_{(x,a)}}{\psi_{(x)}}$$

unendlich gross wird, so stellt das von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ sich erstreckende Integral dieses Quotienten die allgemeine Form einer zahlreichen Classe bestimmter Integrale dar, deren Werthe in manchen Fällen durch vorhergehende Verwandlung in Doppelintegrale erhalten werden können. Zwei solcher Transformationen, welche an sich bemerkenswerth zu sein scheinen, und zugleich einige später zur Anwendung kommende Resultate liefern, mögen hier vorausgeschickt werden.

Es sei $F_{(x,y)}$ eine Function der beiden Veränderlichen x, y, welche also in jedem einzelnen Falle aus $F_{(x,b)}$ oder $F_{(x,a)}$ erhalten wird, wenn man y an die Stelle von b oder a setzt. Bildet man den partiellen Differentialquotienten dieser Function in Bezug auf y, multiplicirt ihn mit dem Ausdrucke:

$$\frac{dx\,dy}{\psi_{(x)}}$$

und integrirt hierauf das Product nach x und y, resp. zwischen den Grenzen α, β und a, b, und zwar zuerst nach y und dann nach x, dann aber auch in der umgekehrten Ordnung, so erhält man die Gleichung:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\psi(x)}\left(F_{(x,b)}-F_{(x,a)}\right)=\int_a^b dy\int_\alpha^\beta \frac{dF(x,y)}{dy}\cdot\frac{dx}{\psi(x)}.$$

Man sieht hieraus, dass wenn in irgend einem besondern Falle die Gleichung:

$$\frac{dF(x,y)}{dy}=\frac{\psi(x)}{\varphi(y)}\cdot\frac{dF(x,y)}{dx}$$

besteht, oder, was dasselbe sagt, wenn $F(x,y)$ die näher bestimmte Form

$$F\left(\int\frac{dx}{\psi(x)}+\int\frac{dy}{\varphi(y)}\right)$$

hat, das vorgelegte Integral sogleich durch ein anderes vermöge der Gleichung

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\psi(x)}\left(F_{(x,b)}-F_{(x,a)}\right)=\int_a^b \frac{dy}{\varphi(y)}\left(F_{(\beta,y)}-F_{(\alpha,y)}\right)$$

ersetzt werden kann, dessen Werth für besondere Werthe von α und β sich oft unmittelbar angeben lässt.

Die gedachte Voraussetzung findet z. B. Statt, wenn

$$\psi(x)=x \text{ und } F_{(x,y)}=\frac{p\,e^{xy}+q}{P\,e^{2xy}+Q\,e^{xy}+R}$$

wofür $\varphi(y)=y$ erhalten wird. Setzt man ausserdem noch $\alpha=o$, $\beta=\infty$, so findet man

$$\int_o^\infty \frac{dx}{x}\left\{\frac{p\,e^{bx}+q}{Pe^{2bx}+Q\,e^{bx}+R}-\frac{p\,e^{ax}+q}{Pe^{2ax}+Q\,e^{ax}+R}\right\}=\frac{p+q}{P+Q+R}\,log\,\frac{a}{b}.$$

Ist ferner $\psi(x)=x$, und $F_{(x,y)}=e^{-xy}$ also $\varphi(y)=y$, so ergibt sich für dieselben Werthe von α und β die bekannte Formel:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-bx} - e^{-ax}\right) = log \frac{a}{b}$$

vorausgesetzt, dass a und b positive Grössen seien.

2.

Aus der zuletzt gefundenen Gleichung lassen sich einige andere Formeln ableiten, welche des spätern Gebrauches wegen bemerkt werden mögen.

Man setze $a + b\sqrt{-1}$ für a und $a_1 + b_1\sqrt{-1}$ für b, und berücksichtige die Gleichung:

$$log \frac{a + b\sqrt{-1}}{a_1 + b_1\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} log \frac{a^2 + b^2}{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{-1}\left(arctg \frac{b}{a} - arctg \frac{b_1}{a_1}\right)$$

trenne auch unter dem Integralzeichen das Reelle von dem Imaginären, so wird man finden,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-ax} \cos bx - e^{-a_1 x} \cos b_1 x\right) = \frac{1}{2} log \frac{a_1^2 + b_1^2}{a^2 + b^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-ax} \sin bx - e^{-a_1 x} \sin b_1 x\right) = arctg \frac{b}{a} - arctg \frac{b_1}{a_1}.$$

Setzt man in der erstern $a_1 = a$ und $b_1 = o$ und integrirt dann zu beiden Seiten nach a, von a bis ∞, so findet man nach Ausführung der betreffenden, einfachen Integrationen:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{1 - \cos bx}{x^2} dx = -\frac{a}{2} log\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + b\, arctg \frac{b}{a}.$$

Für $a = o$ folgt hieraus, wenn man zugleich $2b$ für b setzt:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin bx}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} b,$$

wie indessen auch aus der bekannten Formel:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

gefunden werden kann.

Setzt man dagegen in der ursprünglichen Formel ay für a und integrirt dann beiderseits nach y zwischen den Grenzen α und β, so wird man alsbald erhalten:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{(\beta-\alpha)\,e^{-bx}+\frac{e^{-a\beta x}-e^{-a\alpha x}}{ax}\right\}$$

$$=\beta\,log\,\beta-\alpha\,log\,\alpha-(\beta-\alpha)\left(1+log\,\frac{b}{a}\right)$$

oder, wenn man, um abzukürzen, x für ax, sodann $\frac{b}{a}=k$ und zuletzt wieder a und b für α und β setzt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{(b-a)\,e^{-kx}+\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\right\}$$

$$=b\,log\,b-a\,log\,a-(b-a)\,(1+log\,k).$$

Hieraus würden sich auf ähnlichem Wege noch beliebig viele neue Gleichungen, ohne dass die Integration schwierig würde, entwickeln lassen.

Setzt man ferner in der ursprünglichen Gleichung ausser ay für a auch noch by für b und integrirt dann nach y zwischen den Grenzen α und β, so erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left\{\frac{e^{-a\alpha x}-e^{-a\beta x}}{a}-\frac{e^{-b\alpha x}-e^{-b\beta x}}{b}\right\}=(\beta-\alpha)\,log\,\frac{b}{a}.$$

Schliesslich wollen wir aus den beiden Gleichungen, welche oben durch Substitution des Imaginären erhalten worden sind, zwei andere dadurch ableiten, dass in der erstern by für b und b_1y für b_1, in der zweiten dagegen by für b, ay für a und o für b_1 gesetzt und dann jedesmal nach y zwischen den Grenzen 0 und 1 integrirt werde. Die Ergebnisse sind:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left\{b_1\,e^{-ax}\,sin\,bx-b\,e^{-a_1x}\,sin\,b_1x\right\}$$

$$=b\,b_1\left\{\frac{1}{2}\,log\,\frac{a_1^2+b_1^2}{a^2+b^2}+\frac{a_1}{b_1}\,arctg\,\frac{b_1}{a_1}-\frac{a}{b}\,arctg\,\frac{b}{a}\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left\{b-e^{-ax}\,(a\,sin\,bx+b\,cos\,bx)\right\}=(a^2+b^2)\,arctg\,\frac{b}{a}$$

Dividirt man die erstere dieser Gleichungen durch b und setzt $b = o$, so erhält man weiter noch:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(b_1 e^{-ax} - \frac{\sin b_1 x}{x} e^{-a_1 x}\right) = \frac{b_1}{2} \log \frac{a_1^2 + b_1^2}{a^2} + a_1 \operatorname{arctg} \frac{b_1}{a_1} - b_1.$$

3.

Eine zweite, theilweise der vorigen ähnliche Transformation beruht auf der folgenden einfachen Bemerkung. Bezeichnet allgemein $\theta\,(x, y, z, \ldots)$ eine homogene Function des n^{ten} Grades von den m Veränderlichen $x, y, z \ldots$, so hat man nach dem Theorem von Euler die Gleichung:

$$x\frac{d\theta}{dx} + y\frac{d\theta}{dy} + z\frac{d\theta}{dz} + \ldots = n\theta.$$

Bezeichnet nun ferner $F_{(\theta)}$ irgend eine Function von θ, so lässt sich auch für diese eine, soviel mir bekannt, noch nicht bemerkte, fast eben so einfache Relation aufstellen.

Multiplicirt man nämlich die angeführte Gleichung mit $\frac{dF}{d\theta}$ und beachtet, dass:

$$x\frac{dF}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\,.\,xF_{(\theta)}}{dx} - F_{(\theta)}$$

und dass alle übrigen Glieder sich in gleicher Weise umgestalten lassen, so findet man:

$$\frac{d\,.\,x\,F_{(\theta)}}{dx} + \frac{d\;\,y\,F_{(\theta)}}{dy} + \frac{d\,.\,z\,F_{(\theta)}}{dz} + \cdots = n\theta\,\frac{d\,F_{(\theta)}}{d\theta} + m\,F_{(\theta)}$$

$$= n\,.\,\frac{d\,.\,\theta\,F_{(\theta)}}{d\theta} + (m-n)\,F_{(\theta)}.$$

Diese Gleichung ist wohl der allgemeinste Ausdruck der charakteristischen Relation homogener Functionen. Es ergibt sich zugleich daraus, dass für $n = m$, d. h. für den Fall dass der Grad der Function θ der Anzahl der Veränderlichen gleichkommt, die rechte Seite der Gleichung sich auf $m\,.\,\frac{d\theta\,F_{(\theta)}}{d\theta}$ also wie die linke lediglich auf Differentialquotienten reducirt.

Hier soll blos von dem Falle $m = 2$ des Weitern die Rede sein. Multiplicirt man die entsprechende Differentialgleichung mit dem Ausdrucke

$$\frac{dx\,dy}{\psi(x)}$$

und integrirt sie dann nach x und y resp. zwischen den Grenzen α, β und a, b, so ergibt sich, bei gleichzeitiger Umkehrung der Integrationsfolge die sehr allgemeine Gleichung:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\psi(x)}\Big(b\,F_{(\theta(x,b))} - a\,F_{(\theta(x,a))}\Big) + \int_a^b dy \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\psi(x)} \cdot \frac{d\,.\,x\,F_{(\theta)}}{dx}$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\psi(x)} \int_a^b dy\,\Big(n\theta\,\frac{d\,F_{(\theta)}}{d\theta} + 2\,F_{(\theta)}\Big),$$

wovon die folgenden besonderen Fälle hervorgehoben zu werden verdienen.

Für $\psi(x) = 1$ ergibt sich unmittelbar:

$$\int_\alpha^\beta dx \int_a^b dy\,\Big(n\theta\,\frac{d\,F_{(\theta)}}{d\theta} + 2\,F_{(\theta)}\Big)$$

$$= \int_\alpha^\beta dx\,\Big(b\,F_{(\theta(x,b))} - a\,F_{(\theta(x,a))}\Big) + \int_a^b dy\,\Big(\beta\,F_{(\theta(\beta,y))} - \alpha\,F_{(\theta(\alpha,y))}\Big).$$

Daraus folgt der bemerkenswerthe Satz, dass man zur Reduction des doppelten Integrals linker Hand, wenn nur θ eine homogene Function n^{ten} Grades von x und y ist, keinerlei Integration zu verrichten nöthig hat, wie sonst $F_{(\theta)}$ von θ abhängen möge.

Ist $f_{(\theta)}$ als die Function gegeben, welche der doppelten Integration nach x und y unterzogen werden soll, so muss man, um die obige Formel anzuwenden, erst $F_{(\theta)}$ als Integral der linearen Differentialgleichung

$$n\theta\,\frac{d\,F_{(\theta)}}{d\theta} + 2\,F_{(\theta)} = f_{(\theta)}$$

ermitteln.

Setzt man dagegen voraus, es sei $F_{(\theta)} = \theta$ gegeben, so folgt:

$$\int_\alpha^\beta dx \int_a^b \theta_{(x,y)}\,dy$$

$$= \frac{1}{n+2}\left\{\int_\alpha^\beta dx\,\Big(b\,\theta_{(x,b)} - a\,\theta_{(x,a)}\Big) + \int_a^b dy\,\Big(\beta\,\theta_{(\beta,y)} - \alpha\,\theta_{(\alpha,y)}\Big)\right\}$$

Diese Resultate drücken zugleich neue Eigenschaften der homogenen Functionen aus

4.

Rücksichtlich der Anwendung auf bestimmte Integrale von der Art. 1 bezeichneten Art, bemerke man, dass aus dem Obigen die Gleichung folgt:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\psi(x)}\Big(bF_{(\theta(x,b))} - aF_{(\theta(x,a))}\Big)$$

$$= \int_a^b dy \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\psi(x)} \left\{F_{(\theta)} + \left(n\theta - x\,\frac{d\theta}{dx}\right)\frac{dF_{(\theta)}}{d\theta}\right\}.$$

Um einen besondern Fall zu erörtern, sei hierin:

$$\theta(x,y) = xy \text{ also } n = 2\ ;\ \psi(y) = x$$

und

$$\alpha = o\ ,\ \beta = \infty.$$

Dann erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\Big(bF(bx) - aF(ax)\Big) = \int_a^b dy \int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(F(xy) + xy\,\frac{dF(xy)}{d\cdot xy}\right).$$

Führt man für x eine neue Veränderliche t ein, bestimmt durch die Gleichungen:

$$xy = t\ ,\ dx = \frac{dt}{y},$$

so findet man

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\Big(bF_{(bx)} - aF_{(ax)}\Big) = (b-a)\int_0^\infty \frac{d\,.\,tF_{(t)}}{t}.$$

Diese Gleichung stellt einen der besonderen Fälle dar, welche der in Art. 1 bezeichneten Classe von bestimmten Integralen eigenthümlich sind, bei denen es, im Allgemeinen, unsicher scheint, ein Integral von der Form des linker Hand stehenden in seine zwei Bestandtheile zu zerlegen und nach Transformation jedes einzelnen, dieselben wieder in ein Integral zu vereinigen. Man würde ein von dem obigen ganz verschiedenes Resultat erhalten, wollte man im ersten Theil bx und im zweiten ax durch die neue Veränderliche t ersetzen.

Die oben erhaltene Gleichung lässt sich unter gewissen Voraussetzungen noch näher ausführen. Das Integral kann offenbar nur dann einen endlichen Werth erhalten, wenn $F_{(t)}$ für $t = \infty$ verschwindet. Dies vorausgesetzt und angenommen, es sei für $t = o$ der Werth von

$$tF_{(t)} = T_0,$$

ersetze man $d.tF_{(t)}$ durch $d.(tF_{(t)} - T_0)$ und bemerke, dass durch partielle Integration sich ergibt:

$$\left[\frac{tF_{(t)} - T_0}{t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\left(tF_{(t)} - T_0\right),$$

so hat man, wenn der erste Theil der rechten Seite verschwindet, die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(bF_{(bx)} - aF_{(ax)}\right) = (b-a)\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\left(tF_{(t)} - T_o\right),$$

woraus hervorgeht, dass unter den gemachten Annahmen das vorgelegte Integral nur von der Differenz $(b - a)$ abhängt.

5.

Um noch mehr auf Einzelheiten einzugehen, nehme man an, es sei

$$F_{(t)} = \frac{e^t}{e^{2t} - 1}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet in der That, wenn t unendlich gross wird, und der Werth, welchem sich das Product $tF_{(t)}$ für $t = o$ werdend nähert, ist offenbar:

$$T_o = \frac{1}{2}.$$

Man hat also die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(\frac{be^{bx}}{e^{2bx} - 1} - \frac{ae^{ax}}{e^{2ax} - 1}\right) = (b-a)\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{e^t}{e^{2t} - 1} - \frac{1}{2t}\right).$$

Die Ermittelung dieses letztern Integrals hat nun keine Schwierigkeit, und es ist sogar leicht auf verschiedene Arten dazu zu gelangen. — Offenbar besteht die identische Gleichung:

$$\frac{e^t}{e^{2t} - 1} - \frac{1}{2t} = -\frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) + \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{e^{2t} - 1} - \frac{1}{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)$$

Multiplicirt man dieselbe mit $\frac{dt}{t}$ und integrirt sie dann von o bis ∞, so werden die Integrale des zweiten und dritten Gliedes nicht nur endliche Werthe haben, sondern auch genau einander gleich sein. Vom letztern überzeugt man sich sogleich, wenn man im dritten Gliede die Integrationsveränderliche t durch $\frac{1}{2}t$ ersetzt. Um zu sehen, dass jedes Integral endlich ist, genügt es, die Function unter dem Integralzeichen für $t = o$ zu bestimmen, wofür man factisch einen endlichen Werth erhält. Es bleibt somit auf der rechten Seite nur allein das erste Glied stehen, dessen Werth nach Art. 1 $= -\frac{1}{2} \log 2$ ist und man hat das Verlangte:

$$\int_o^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{e^t}{e^{2t}-1} - \frac{1}{2t}\right) = -\frac{1}{2} \log 2.$$

Wegen der besondern Wichtigkeit dieses Ergebnisses scheint es angemessen, dasselbe auf eine zweite, völlig verschiedene Art zu entwickeln. In der Gleichung:

$$\int_o^\infty \frac{dt}{k^2+t^2} = \frac{\pi}{2k}$$

setze man für k successive alle ganzen Zahlen 1, 2, 3, . . . und versehe die Glieder der entstehenden Reihe, welche einem geraden Werthe von k entsprechen, mit dem negativen Vorzeichen, so wird man erhalten:

$$\int_0^\infty dt \left\{\frac{1}{1^2+t^2} - \frac{1}{2^2+t^2} + \frac{1}{3^2+t^2} - \cdots\right\} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right).$$

Da nun die Reihe unter den Integralzeichen (s. Euler, Introductio in analys. infinit. Cap. X) den Ausdruck

$$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{2t} - \frac{\pi}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\right)$$

und die Reihe rechter Hand $\log 2$ zur Summe hat, so folgt

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{e^{\pi t}}{e^{2\pi t}-1} - \frac{1}{2\pi t}\right) = -\frac{1}{2} \log 2.$$

Setzt man nun t für πt, so geht diese Gleichung genau in die oben gefundene über.

Das Resultat dieser Rechnung ist also die Formel:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(\frac{b}{e^{bx}-e^{-bx}}-\frac{a}{e^{ax}-e^{-ax}}\right)=\frac{1}{2}(a-b)\log 2.$$

6.

Setzt man in der allgemeinen Formel des Art. 4

$$\theta_{(x,y)}=\frac{y}{x}, \quad \psi_{(x)}=x^2, \quad n=o$$

$$\alpha=o, \quad \beta=\infty$$

und führt für x eine neue Veränderliche t ein, bestimmt durch die Gleichungen:

$$xt=y, \quad dx=-\frac{y}{t^2}dt,$$

so erfolgt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left(bF_{\left(\frac{b}{x}\right)}-aF_{\left(\frac{a}{x}\right)}\right)=\int_a^b\frac{dy}{y}\int_0^\infty\frac{d\,.\,tF_{(t)}}{dt}.dt.$$

Setzt man auf der linken Seite $\frac{1}{x}$ für x und führt man auf der rechten die beiden Integrationen aus, so erhält man die weitere Gleichung:

$$\int_0^\infty dx\left(bF_{(bx)}-aF_{(ax)}\right)=\left[tF_{(t)}\right]_0^\infty\cdot\log\frac{b}{a}.$$

Auch auf diese Gleichung ist, hinsichtlich der Zerlegung und Transformation der einzelnen Theile des Integrals linker Hand die im Artikel 4 gemachte Bemerkung zu beziehen. Der Irrthum, welcher eintreten könnte, ist hier wohl unzweifelhaft; denn man erhielte, indem x für bx und dann für ax gesetzt würde, für das Integral auf der linken Seite immer Null, was, wie man sieht, wohl in einzelnen Fällen, im Allgemeinen aber nicht richtig ist.

Um dies in concreto zu zeigen, nehme man an, es sei

$$F_{(t)}=\frac{1}{t}\log\left(p+qe^{-t}\right),$$

so ist

$$\left[tF_{(t)}\right]_0^\infty=-\log\left(1+\frac{q}{p}\right)$$

und man hat unmittelbar das Resultat:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \log \frac{p+q\,e^{-bx}}{p+q\,e^{-ax}} = \log \frac{a}{b} \cdot \log\left(1+\frac{q}{p}\right).$$

Um einige weitere Anwendungen zu machen, setzen wir:

$$F_{(t)} = \frac{1}{t}\left(1+\frac{k}{t}\right)^t$$

und erhalten:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{\left(1+\frac{k}{bx}\right)^{bx} - \left(1+\frac{k}{ax}\right)^{ax}\right\} = (e^k - 1)\log\frac{b}{a}.$$

Setzt man sofort für $F_{(t)}$ die Ausdrücke:

$$\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{(k+t)^n}\ ;\ \frac{1}{t}\, arctg\, e^t$$

und

$$\frac{1}{t}\cdot\frac{arctgt}{1-e^{-kt}}\ ;\ \frac{e^{-ne^t}}{1-e^{-t}},$$

so wird man leicht zu den folgenden Integralbestimmungen gelangen:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{\frac{1}{(k+bx)^n} - \frac{1}{(k+ax)^n}\right\} = \frac{1}{k^n}\log\frac{b}{a}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(arctg\, e^{bx} - arctg\, e^{ax}\right) = \frac{\pi}{4}\log\frac{b}{a}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{\frac{arctgbx}{1-e^{-bkx}} - \frac{arctgax}{1-e^{-akx}}\right\} = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{k}\right)\log\frac{b}{a}$$

$$\int_0^\infty dx\left\{\frac{be^{-ne^{bx}}}{1-e^{-bx}} - \frac{ae^{-ne^{ax}}}{1-e^{-ax}}\right\} = e^{-n}\log\frac{a}{b}.$$

7.

Die Werthe, welche $tF_{(t)}$ für $t = o$ und $t = \infty$ annimmt, lassen sich indessen nicht immer so leicht angeben, wie in den eben betrachteten Fällen. Als Beispiel hierfür kann der Ausdruck

$$\frac{\Gamma(t+\mu)}{(t+m)^{t+\mu}}$$

dienen. Wir werden einige Fälle dieser Art näher erörtern. Dieselben beziehen sich auf die sogenannte Gammafunction, mit welcher sich das Folgende weiter beschäftigen wird.

Setzt man in der früher erhaltenen Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-qx} - e^{-px}\right) = log\,\frac{p}{q},$$

welche nur gilt, so lange p und q positiv sind:

$$p = \varphi(t) \;,\quad q = \psi(t);$$

setzt man voraus, dass $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ für alle zwischen o und ∞ liegenden Werthe von t positiv bleiben, multiplicirt man ferner die obige Gleichung mit $f(t)dt$ und integrirt sie zu beiden Seiten innerhalb der Grenzen o und ∞, so ergibt sich die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^\infty f(t)\,(e^{-x\psi(t)} - e^{-x\varphi(t)})\,dt = \int_0^\infty f(t)\,log\,\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}\,dt.$$

Bezeichnen nun a, b, α, β positive Grössen der Art, dass

$$a : \alpha = b : \beta$$

und zugleich jedes dieser Verhältnisse grösser als die Einheit ist, so kann man, den obigen Bedingungen entsprechend, setzen:

$$\varphi\,(t) = at - \alpha\,log\,t \;,\quad \psi\,(t) = bt - \beta\,log\,t$$

und wenn man $\frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha}$ mit k bezeichnet, so ergibt sich

$$\frac{\varphi\,(t)}{\psi\,(t)} = \frac{1}{k}.$$

Fügt man diesen Annahmen noch die weitere bei, dass

$$f(t) = t^{\mu-1}\,e^{-mt},$$

so geht die obige Gleichung über in die folgende

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^\infty dt\left\{t^{\alpha x+\mu-1}\,e^{-(ax+m)t} - t^{\beta x+\mu-1}\,e^{-(bx+m)t}\right\}$$

$$= log\,k.\int_0^\infty t^{\mu-1}e^{-mt}\,dt.$$

Da nun: $$\int_0^\infty t^{\nu-1}\,e^{-nt}\,dt = \frac{\Gamma(\nu)}{n^\nu},$$

so ergibt sich, wenn man zu beiden Seiten die Integration in Bezug auf t ausführt, die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha x + \mu)}{(ax+m)^{\alpha x + \mu}} - \frac{\Gamma(\beta x + \mu)}{(bx+m)^{\beta x + \mu}} \right\} = \frac{\Gamma(\mu)}{m^\mu} \log k.$$

Lässt man α und β in der Art ohne Ende abnehmen, dass beständig $\beta = \alpha\, k$ bleibt, so erhält man ein in Art. 6 gefundenes Resultat wieder.

Bezeichnen nochmals a, b, α, β positive Grössen, welche der Proportion $a : \alpha = b : \beta$ Genüge thun und setzt man jetzt:

$$\varphi(t) = (a + \alpha) \log (1 + rt) - \alpha \log t,$$
$$\psi(t) = (b + \beta) \log (1 + rt) - \beta \log t$$
$$f(t) = \frac{t^{\mu - 1}}{(1 + rt)^{m + \mu}}$$

wobei r, m, μ positive Constanten vorstellen mögen, so erhält man unter diesen Voraussetzungen:

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{a + \alpha}{b + \beta}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_0^\infty dt \left\{ \frac{t^{\alpha x + \mu - 1}}{(1 + rt)^{(a+\alpha)x + m + \mu}} - \frac{t^{\beta x + \mu - 1}}{(1 + rt)^{(b+\beta)x + m + \mu}} \right\}$$
$$= \log \frac{b + \beta}{a + \alpha} \int_0^\infty \frac{t^{\mu - 1} dt}{(1 + rt)^{m + \mu}}$$

oder also, wenn man zu beiden Seiten die Integration in Bezug auf t ausführt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ r^{-\alpha x} \cdot \frac{\Gamma(ax + m)\, \Gamma(\alpha x + \mu)}{\Gamma((a + \alpha)x + m + \mu)} - r^{-\beta x} \frac{\Gamma(bx + m)\, \Gamma(\beta x + \mu)}{\Gamma((b + \beta)x + m + \mu)} \right\}$$
$$= \frac{\Gamma(m)\, \Gamma(\mu)}{\Gamma(m + \mu)} \cdot \log \frac{b + \beta}{a + \alpha}.$$

Wie man sieht, ist der Werth des Integrals von der positiven Grösse r unabhängig. Setzt man $r = 1$ und lässt man α und β so verschwinden, dass beständig $\beta = \frac{b}{a} \alpha$ bleibt, so kann man die Gleichung durchgehends mit $\Gamma(\mu)$ dividiren und dann der Kürze wegen n für $m + \mu$ setzen. Man erhält dabei die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ \frac{\Gamma(ax + m)}{\Gamma(ax + n)} - \frac{\Gamma(bx + m)}{\Gamma(bx + n)} \right\} = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n)} \log \frac{b}{a}$$

Es ist klar, dass auf einem Wege, welcher dem bisher eingeschlagenen analog ist, noch viele andere, mehr oder weniger allgemeine Formeln erhalten werden können. Man könnte z. B. die von selbst einleuchtende Gleichung zu Grunde legen:

$$\int_0^\infty x^{m-1}\,dx \int_a^b f(t)\,.\,e^{-x\varphi(t)}\,dt = \Gamma_{(m)} \int_a^b \frac{f(t)}{\varphi(t)^m}\,dt,$$

wofür wir als specielle Anwendung nur den Fall bemerklich machen wollen, in welchem

$$f(t) = e^t \quad , \quad \varphi(t) = kt.$$

Man erhält, unter der Voraussetzung, dass k eine positive Grösse sei, die Reductionsformel:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1-kx}\left\{e^{b(1-kx)} - e^{a(1-kx)}\right\} dx = \frac{\Gamma_{(m)}}{k^m} \int_a^b t^{-m}\, e^t\, dt$$

u. s. w.

8.

Theorem. Bezeichnen a, b, k positive Grössen und α, β zwei positive ganze Zahlen, welche der Proportion:

$$a : \alpha = b : \beta$$

Genüge leisten und setzt man wie üblich:

$$\Gamma_{(k)} = \int_0^\infty x^{k-1}\, e^{-x}\, dx\,,$$

so findet in voller Allgemeinheit die Gleichung Statt:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k}{a}\right)\Gamma\left(\frac{k+b}{a}\right)\Gamma\left(\frac{k+2b}{a}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k+(\alpha-1)b}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{b}\right)\Gamma\left(\frac{k+a}{b}\right)\Gamma\left(\frac{k+2a}{b}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k+(\beta-1)a}{b}\right)} = (2\pi)^{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\alpha}{a}k+\frac{a\beta-(\alpha+\beta)}{2}}$$

Um diese Gleichung ausschliesslich aus Gründen der Integralrechnung und zwar ohne Benützung von Reihen herzuleiten, mache ich von der bekannten Formel Gebrauch, durch welche der Logarithmus der Gammafunction in Form eines bestimmten Integrals dargestellt wird. Man erhält eine solche Form, wenn man in der Gleichung

$$\frac{d\Gamma(k)}{dk} = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} \log x \, dx$$

die Substitution:

$$\log x = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t} - e^{-xt}\right)$$

macht und die Integrationsfolge umkehrt, wobei dann $\Gamma_{(k)}$ als gemeinschaftlicher Factor heraustritt, so dass man schliesslich findet:

$$\frac{d \log \Gamma(k)}{dk} = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^k}\right).$$

Integrirt man nun diese Gleichung nach k, indem man von dem Anfangswerthe $k = 1$ ausgeht und beachtet, dass $\Gamma_{(1)} = 1$ ist, so ergibt sich alsbald:

$$\log \Gamma_{(k)} = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left\{(k-1)e^{-t} + \frac{1}{(1+t)^k \log(1+t)} - \frac{1}{(1+t)\log(1+t)}\right\}.$$

Diese für das Folgende nicht ganz geeignete Form liesse sich unmittelbar vereinfachen, wenn man sich erlauben würde, das Integral zu zerlegen und den auf die beiden letzten Glieder sich beziehenden Bestandtheil dadurch zu transformiren, dass man t für $\log(1+t)$ setzte, und nachher die Integrale wieder in ein einziges vereinigte. Da aber gegen die Zulässigkeit dieses Verfahrens Bedenken in Schriften erhoben worden sind, und zwar aus Rücksichten, deren in Art. 4 und 6 bereits Erwähnung geschah, so wollen wir die gedachte Transformation auf anderm Wege zu bewirken suchen, welcher wohl vollkommen strenge ist. Setzt man $k+1$ für k und zieht dann die obige Gleichung von der hieraus entstandenen ab, indem man auf die Formel

$$\Gamma_{(k+1)} = k\Gamma_{(k)}$$

Rücksicht nimmt, so ergibt sich:

$$\log k = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left\{e^{-t} - \frac{t}{(1+t)^{k+1} \log(1+t)}\right\}$$

und für $k = 1$:

$$o = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left\{e^{-t} - \frac{t}{(1+t)^2 \log(1+t)}\right\}.$$

Multiplicirt man die letztere Gleichung mit $k-1$ und zieht sie dann von der frühern für $log\,\Gamma_{(k)}$ ab, so findet man:

$$log\,\Gamma_{(k)}=\int_0^\infty\frac{dt}{t\,log\,(1+t)}\left\{\frac{(k-1)t}{(1+t)^2}-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^k}\right\}.$$

Transformirt man schliesslich dieses Integral, indem man

$$1+t=e^x\ ,\ \frac{dt}{t}=\frac{dx}{1-e^{-x}}$$

setzt, so gelangt man bald zu der Gleichung

$$log\,\Gamma_{(k)}=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{x}\left\{k-1-\frac{1-e^{-(k-1)x}}{1-e^{-x}}\right\}dx,$$

welche nun die oben gedachte Form besitzt.

9.

Dieses vorausgesetzt wollen wir nun, der Ordnung nach, einmal:

$$\frac{k}{a},\ \frac{k+b}{a},\ \frac{k+2b}{a},\ \ldots\ldots\ \frac{k+(\alpha-1)b}{a}$$

und dann

$$\frac{k}{b},\ \frac{k+a}{b},\ \frac{k+2a}{b},\ \ldots\ldots\ \frac{k+(\beta-1)a}{b}$$

für k setzen und der Kürze wegen

$$A=\Gamma\left(\frac{k}{a}\right)\Gamma\left(\frac{k+b}{a}\right)\Gamma\left(\frac{k+2b}{a}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k+(\alpha-1)b}{a}\right)$$

$$B=\Gamma\left(\frac{k}{b}\right)\Gamma\left(\frac{k+a}{b}\right)\Gamma\left(\frac{k+2a}{b}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k+(\beta-1)a}{b}\right)$$

bezeichnen.

Die letzte Formel des vorigen Artikel liefert dann wenn man die jeder Reihe von Werthen der Grösse k entsprechenden Gleichungen addirt, so wie auch die zum Vorschein kommenden arithmetischen und geometrischen Reihen summirt, die beiden folgenden Gleichungen:

$$log\,A=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{x}\left\{\frac{\alpha}{a}k+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{b}{a}-\alpha-\frac{\alpha}{1-e^{-x}}\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-\left(\frac{k}{a}-1\right)x}}{1-e^{-x}}\cdot\frac{1-e^{-\frac{b}{a}\alpha x}}{1-e^{-\frac{b}{a}x}}\right\}dx$$

$$log\, B = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} \left\{ \frac{\beta}{b} k + \frac{\beta(\beta-1)}{2} \frac{a}{b} - \beta - \frac{\beta}{1-e^{-x}} \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\left(\frac{k}{b}-1\right)x}}{1-e^{-x}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{a}{b}\beta x}}{1-e^{-\frac{a}{b}x}} \right\} dx.$$

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen ax und in der letztern bx für x, so wird man nach einigen nahe liegenden Umgestaltungen finden:

$$log\, A = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ \frac{\alpha}{a} \left(k + \frac{\alpha b - (a+b)}{2} \right) e^{-ax} - \frac{\alpha}{2} e^{-ax} - \frac{\alpha}{e^{ax}-1} \right.$$

$$\left. + \frac{(1-e^{-\alpha bx})\, e^{-kx}}{(1-e^{-ax})\,(1-e^{-bx})} \right\}$$

$$log\, B = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ \frac{\beta}{b} \left(k + \frac{\beta a - (a+b)}{2} \right) e^{-bx} - \frac{\beta}{2} e^{-bx} - \frac{\beta}{e^{bx}-1} \right.$$

$$\left. + \frac{(1-e^{-\beta ax})\, e^{-kx}}{(1-e^{-ax})\,(1-e^{-bx})} \right\}$$

Zieht man nun diese beiden Gleichungen von einander ab und berücksichtigt, dass vermöge der in Art. 8 vorausgesetzten Proportion:

$$a:\alpha = b:\beta$$

die Gleichungen: $\frac{\beta}{b} = \frac{\alpha}{a}$; $\beta a = \alpha b$

stattfinden, und dass also die beiden letzten Glieder der zwei Integrale sich gegenseitig aufheben, so findet man unmittelbar die folgende Gleichung:

$$log \frac{A}{B} = \frac{\alpha}{a} \left(k + \frac{\alpha b - (a+b)}{2} \right) \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left(e^{-ax} - e^{-bx} \right)$$

$$+ \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ \frac{1}{2} \left(\beta e^{-bx} - \alpha e^{-ax} \right) + \left(\frac{\beta}{e^{bx}-1} - \frac{\alpha}{e^{ax}-1} \right) \right\}$$

oder, wenn man das erstere Integral nach der entsprechenden Formel des Art. 1 effectuirt:

$$\log\frac{A}{B}+\frac{\alpha}{a}\left(k+\frac{\alpha b-(a+b)}{2}\right)\log\frac{a}{b}$$

$$=\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left\{\frac{1}{2}\left(\beta\, e^{-bx}-\alpha\, e^{-ax}\right)+\left(\frac{\beta}{e^{bx}-1}-\frac{\alpha}{e^{ax}-1}\right)\right\}$$

Das letztere Integral, auf dessen nähere Bestimmung nun Alles zurückgeführt ist, lässt sich mit Hilfe einiger schon früher abgeleiteten Formeln finden, womit wir uns nun beschäftigen werden.

10.

Von den verschiedenen Wegen, welche sich zur Ermittelung jenes Integrals bezeichnen lassen, schlagen wir den folgenden ein, der, wenn auch nicht am nächsten liegend, doch am kürzesten zum Ziele führt.

Man setze in der am Schlusse des Art. 8 für $\log\Gamma_{(k)}$ angeführten Formel $k=\frac{1}{2}$ und berücksichtige, dass, wie bekannt, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ist, so wird man finden:

$$\frac{1}{2}\log\pi=\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{e^x-1}+\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{e^x-1}\right\}$$

und, wenn man hierin einmal ax und dann bx für x setzt:

$$\frac{1}{2}\log\pi=\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left\{-\frac{1}{2}e^{-ax}-\frac{1}{e^{ax}-1}+\frac{e^{\frac{1}{2}ax}}{e^{ax}-1}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\log\pi=\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left\{-\frac{1}{2}e^{-bx}-\frac{1}{e^{bx}-1}+\frac{e^{\frac{1}{2}bx}}{e^{bx}-1}\right\}.$$

Multiplicirt man nun die erste dieser Gleichungen mit α und die zweite mit β und zieht dann beide von einander ab, so erfolgt:

$$\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\log\pi=\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left\{\frac{1}{2}\left(\beta e^{-bx}-\alpha e^{-ax}\right)+\left(\frac{\beta}{e^{bx}-1}-\frac{\alpha}{e^{ax}-1}\right)\right\}$$

$$+\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left\{\frac{\alpha e^{\frac{1}{2}ax}}{e^{ax}-1}-\frac{\beta e^{\frac{1}{2}bx}}{e^{bx}-1}\right\}.$$

Das erstere Integral ist genau das zu bestimmende; eliminiren wir es aus dieser und der Schlussgleichung des vorigen Artikels, so ergibt sich:

$$log\frac{A}{B}+\frac{\alpha}{a}\left(k+\frac{\alpha b-(a+b)}{2}\right)log\frac{a}{b}-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,log\,\pi$$

$$=\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left\{\frac{\beta e^{\frac{1}{2}bx}}{e^{bx}-1}-\frac{\alpha e^{\frac{1}{2}ax}}{e^{ax}-1}\right\}.$$

Was endlich das letztere Integral betrifft, so kann man sich leicht überzeugen, dass es nur dann einen endlichen Werth hat, wenn die Grössen a, b, α, β in der bisher vorausgesetzten Proportion zu einander stehen. Um aber diesen Werth selbst zu erlangen, setze man $\beta=\frac{\alpha}{a}b$, und zugleich auch $2x$ für x, so nimmt jenes Integral die Form an:

$$\frac{\alpha}{a}\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left\{\frac{be^{bx}}{e^{2bx}-1}-\frac{ae^{ax}}{e^{2ax}-1}\right\},$$

in welcher wir es, Art. 5, betrachtet und vollständig bestimmt haben. Dem dortigen Ergebnisse zufolge erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha}{a}(a-b)\,log\,2 \text{ oder } \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,log\,2.$$

Unsere Gleichung ist nun von Integralen gänzlich befreit und heisst:

$$log\frac{A}{B}+\frac{\alpha}{a}\left(k+\frac{\alpha b-(a+b)}{2}\right)log\frac{a}{b}-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)log\,\pi=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,log\,2$$

oder, wenn man für A und B die früheren Ausdrücke wieder einsetzt:

$$log\frac{\Gamma\left(\frac{k}{a}\right)\Gamma\left(\frac{k+b}{a}\right)\Gamma\left(\frac{k+2b}{a}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(\frac{k+(\alpha-1)b}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{b}\right)\Gamma\left(\frac{k+a}{b}\right)\Gamma\left(\frac{k+2a}{b}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(\frac{k+(\beta-1)a}{b}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,log\,2\pi+\left(\frac{\alpha}{a}k+\frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{2}\right)log\frac{b}{a}.$$

Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so ergibt sich, wie man sieht, die in Art. 8 aufgestellte Gleichung, womit also der Satz begründet ist.

11.

Die Beziehung, welche soeben nachgewiesen wurde, scheint der allgemeinste Ausdruck des sogenannten Multiplications-Theorems

zu sein, welches eine der schönsten Eigenschaften der Euler'schen Integrale zweiter Art darstellt. In der That lassen sich alle bisher bekannten Formen desselben als specielle Fälle aus unserer Gleichung ableiten.

Wir wollen zunächst $\alpha = a$ und $\beta = b$ setzen; dann findet sich:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k}{a}\right)\Gamma\left(\frac{k+b}{a}\right)\Gamma\left(\frac{k+2b}{a}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k+(a-1)b}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{b}\right)\Gamma\left(\frac{k+a}{b}\right)\Gamma\left(\frac{k+2a}{b}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k+(b-1)a}{b}\right)} = (2\pi)^{\frac{1}{2}(a-b)} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{k+\frac{ab-(a+b)}{2}}.$$

Specialisiren wir noch weiter und setzen $b = 1$, sowie auch der Kürze wegen ka für k, so erhält man hieraus:

$$\Gamma_{(k)}\Gamma\left(k+\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(k+\frac{2}{a}\right)\ldots\Gamma\left(k+\frac{a-1}{a}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(a-1)} \,.\, a^{\frac{1}{2}-ka} \,.\, \Gamma_{(ka)}.$$

Diese letztere Gleichung ist bekannt und wurde zuerst von Gauss in den Comment. Gotting. recent. tom II. a. 1812 durch Betrachtung unendlicher Producte gefunden. Viel früher ward bekanntlich von Euler das noch speciellere Theorem entdeckt, welches man erhält, wenn in dem Gauss'schen $k = o$ gesetzt wird. Um dasselbe auf kurzem Wege ebenfalls herzustellen, denke man sich die letztere Gleichung zuerst mit k multiplicirt und bemerke, dass beziehungsweise auf der linken und rechten Seite derselben die Ausdrücke

$$k\Gamma_{(k)} = \Gamma_{(1+k)}\ ;\ k\Gamma_{(ak)} = \frac{1}{a}\Gamma_{(1+ka)}$$

für $k = o$ resp. in $\Gamma_{(1)} = 1$ und $\frac{1}{a}\Gamma_{(1)} = \frac{1}{a}$ übergehen, so dass man hat:

$$\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(\frac{2}{a}\right)\Gamma\left(\frac{3}{a}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{a-1}{a}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(a-1)}}{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^{a-1}}{a}}$$

welches die Euler'sche Gleichung ist.

Schliesslich mögen noch einige besondere Fälle der allgemeinen Gleichung erwähnt werden.

Setzt man in derselben $k = o$ und berücksichtigt, dass der Ausdruck

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{b}\right)}$$

für $k=o$ sich der Grenze $\frac{a}{b}$ anschliesst, so findet man weiter die Gleichung:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{b}{a}\right)\Gamma\left(2\frac{b}{a}\right)\Gamma\left(3\frac{b}{a}\right)\ldots\ldots\Gamma\left((\alpha-1)\frac{b}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)\Gamma\left(2\frac{a}{b}\right)\Gamma\left(3\frac{a}{b}\right)\ldots\ldots\Gamma\left((\beta-1)\frac{a}{b}\right)}=(2\pi)^{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\left(\frac{b}{a}\right)^{1+\frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{2}}$$

welche auch noch stattfindet, wenn man $\alpha=a$, $\beta=b$ setzt.

12.

Theorem. Bezeichnen a, b, k, m, n positive Grössen und α, β zwei positive ganze Zahlen, welche der Proportion:

$$a:\alpha=b:\beta$$

Genüge leisten, und setzt man

$$u=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{mx-ne^x}\cos rx\,.\,dx\quad;\quad v=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{mx-ne^x}\sin rx\,.\,dx\,,$$

sodann:

$$u^2+v^2=\Pi_{(m,r)}\quad;\quad\frac{v}{u}=\Theta_{(m,r)}\,,$$

so finden die beiden folgenden Gleichungen Statt:

$$\frac{\Pi\left(\frac{k}{a},\frac{r}{a}\right)\Pi\left(\frac{k+b}{a},\frac{r}{a}\right)\Pi\left(\frac{k+2b}{a},\frac{r}{a}\right)\ldots\Pi\left(\frac{k+(\alpha-1)b}{a},\frac{r}{a}\right)}{\Pi\left(\frac{k}{b},\frac{r}{b}\right)\Pi\left(\frac{k+a}{b},\frac{r}{b}\right)\Pi\left(\frac{k+2a}{b},\frac{r}{b}\right)\ldots\Pi\left(\frac{k+(\beta-1)a}{b},\frac{r}{b}\right)}$$

$$=\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\alpha-\beta}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{2\frac{\alpha}{a}k+\alpha\beta-(\alpha+\beta)}$$

$$arctg\,\Theta\left(\frac{k}{a},\frac{r}{a}\right)+arctg\,\Theta\left(\frac{k+b}{a},\frac{r}{a}\right)+arctg\,\Theta\left(\frac{k+2b}{a},\frac{r}{a}\right)+\ldots$$
$$+\,arctg\,\Theta\left(\frac{k+(\alpha-1)b}{a},\frac{r}{a}\right)+\frac{\alpha}{a}\,r\log a=$$
$$arctg\,\Theta\left(\frac{k}{b},\frac{r}{b}\right)+arctg\,\Theta\left(\frac{k+a}{b},\frac{r}{b}\right)+arctg\,\Theta\left(\frac{k+2a}{b},\frac{r}{b}\right)+\ldots$$
$$+\,arctg\,\Theta\left(\frac{k+(\beta-1)a}{a},\frac{r}{b}\right)+\frac{\beta}{b}\,r\log b.$$

Wir werden im Folgenden auch diese beiden neuen Gleichungen nur aus Gründen der Integralrechnung und ohne Einmischung des Imaginären herzuleiten suchen.

Man gelangt hierzu am leichtesten durch Betrachtung der Relationen, in welchen die auf r bezogenen Differentialquotienten der Integrale u und v zu einander stehen. Es ist nämlich:

$$\frac{du}{dr} = -\int_{-\infty}^{+\infty} x . e^{mx - ne^x} . \sin rx \, . \, dx$$

$$\frac{dv}{dr} = +\int_{-\infty}^{+\infty} x . e^{mx - ne^x} . \cos rx \, . \, dx$$

Da nun:

$$x = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} \left(e^{-ny} - e^{-nye^x}\right),$$

so folgt:

$$\frac{du}{dr} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} \left\{ - ve^{-ny} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{mx - n(1+y)e^x} \sin rx \, dx \right\}$$

$$\frac{dv}{dr} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} \left\{ + ue^{-ny} - \int_0^{+\infty} e^{mx - n(1+y)e^x} \cos rx \, dx \right\}$$

und wenn man für x eine neue Veränderliche z, bestimmt durch die Gleichung

$$(1 + y)\, e^x = e^z \quad , \quad x = z - \log\,(1 + y)$$

einführt, zugleich auch bemerkt, dass alsdann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{mx - n(1+y)e^x} . \sin rx \, dx = \frac{v \cos\,(r \log\,(1 + y)) - u \sin\,(r \log\,(1 + y))}{(1 + y)^m}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{mx - n(1+y)e^x} . \cos rx \, dx = \frac{u \cos\,(r \log\,(1 + y)) + v \sin\,(r \log\,(1 + y))}{(1 + y)^m}$$

so erhält man durch Substitution dieser Ausdrücke:

$$\frac{du}{dr} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} \left\{ - ve^{-ny} + \frac{v \cos\,(r \log\,(1 + y)) - u \sin\,(r \log\,(1 + y))}{(1 + y)^m} \right\}$$

$$\frac{dv}{dr} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} \left\{ + ue^{-ny} - \frac{u \cos\,(r \log\,(1 + y)) + v \sin\,(r \log\,(1 + y))}{(1 + y)^m} \right\}.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit u, die zweite mit v und addirt dann beide; multiplicirt man hierauf die erste mit v, die zweite mit u und zieht dann beide von einander ab, so ergibt sich

$$u\frac{du}{dr}+v\frac{dv}{dr}=-(u^2+v^2)\int_0^\infty\frac{dy}{y}\cdot\frac{\sin(r\log(1+y))}{(1+y)^m}$$

$$u\frac{dv}{dr}+v\frac{du}{dr}=+(u^2+v^2)\int_0^\infty\frac{dy}{y}\left\{e^{-ny}-\frac{\cos(r\log(1+y))}{(1+y)^m}\right\}$$

oder, wenn man der Kürze halber e^x für $1+y$ setzt:

$$\frac{d.\log(u^2+v^2)}{dr}=-2\int_0^\infty\frac{e^{-mx}}{1-e^{-x}}\sin rx\,.\,dx$$

$$\frac{d.\operatorname{arctg}\frac{v}{u}}{dr}=+\int_0^\infty\frac{dx}{1-e^{-x}}\left\{e^{n-ne^x}-e^{-mx}\cos rx\right\}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich zwei andere ableiten. Integrirt man nämlich nach r, von o bis r, und bemerkt dass für $r=o$.

$$u=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{mx-ne^x}\,dx=\int_0^\infty x^{m-1}\,e^{-nx}\,dx=\frac{\Gamma(m)}{n^m}$$

und

$$v=o$$

ist, so findet man unmittelbar die Gleichungen:

$$\log(u^2+v^2)=2\log\frac{\Gamma(m)}{n^m}+2\int_0^\infty\frac{e^{-mx}}{1-e^{-x}}\cdot\frac{\cos rx-1}{x}\,dx$$

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{u}=\int_0^\infty\frac{dx}{1-e^{-x}}\left\{re^{n-ne^x}-e^{-mx}\frac{\sin rx}{x}\right\},$$

welche an sich bemerkenswerth erscheinen.

13.

In diesen beiden Gleichungen wollen wir nun der Ordnung nach einmal

$$\frac{k}{a},\ \frac{k+b}{a},\ \frac{k+2b}{a},\ \ldots.\ \frac{k+(\alpha-1)b}{a}\ \text{für } m,\quad \frac{r}{a}\ \text{für } r$$

und dann:

$$\frac{k}{b},\ \frac{k+a}{b},\ \frac{k+2a}{b},\ \ldots.\ \frac{k+(\beta-1)a}{b}\ \text{für } m,\quad \frac{r}{b}\ \text{für } r$$

setzen und der Kürze wegen bezeichnen:

$$P = \Pi\left(\frac{k}{a}, \frac{r}{a}\right) \Pi\left(\frac{k+b}{a}, \frac{r}{a}\right) \cdots \Pi\left(\frac{k+(\alpha-1)b}{a}, \frac{r}{a}\right)$$

$$Q = \Pi\left(\frac{k}{b}, \frac{r}{b}\right) \Pi\left(\frac{k+a}{b}, \frac{r}{b}\right) \cdots \Pi\left(\frac{k+(\beta-1)a}{b}, \frac{r}{b}\right);$$

ferner:

$$T = arctg\,\Theta\left(\frac{k}{a}, \frac{r}{a}\right) + arctg\,\Theta\left(\frac{k+b}{a}, \frac{r}{a}\right) + \ldots + arctg\,\Theta\left(\frac{k+(\alpha-1)b}{a}, \frac{r}{a}\right)$$

$$S = arctg\,\Theta\left(\frac{k}{b}, \frac{r}{b}\right) + arctg\,\Theta\left(\frac{k+a}{b}, \frac{r}{b}\right) + \ldots + arctg\,\Theta\left(\frac{k+(\beta-1)a}{b}, \frac{r}{b}\right)$$

Addirt man nun die jeder Reihe von Werthen der Grösse m entsprechenden Gleichungen und bildet zugleich auch die Summen der zum Vorschein kommenden arithmetischen und geometrischen Reihen, so ergeben sich die folgenden vier Gleichungen:

$$log\, P = log\, A^2 - \frac{\alpha}{a}\left(k + \frac{\alpha-1}{2} b\right) log\, n^2$$

$$+ 2\int_0^\infty \frac{cos\,\frac{r}{a}x - 1}{x} \cdot \frac{e^{-\frac{k}{a}x}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{a}bx}\right)}{\left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-\frac{b}{a}x}\right)}\, dx$$

$$log\, Q = log\, B^2 - \frac{\beta}{b}\left(k + \frac{\beta-1}{2} a\right) log\, n^2$$

$$+ 2\int_0^\infty \frac{cos\,\frac{r}{b}x - 1}{x} \cdot \frac{e^{-\frac{k}{b}x}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{b}ax}\right)}{\left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-\frac{a}{b}x}\right)}\, dx$$

$$T = \int_0^\infty \frac{dx}{1-e^{-x}} \left\{\frac{r}{a}\alpha . e^{n-ne^x} - \frac{sin\,\frac{r}{a}x}{x} \cdot \frac{e^{-\frac{k}{a}x}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{a}bx}\right)}{1-e^{-\frac{b}{a}x}}\right\}$$

$$S = \int_0^\infty \frac{dx}{1-e^{-x}} \left\{\frac{r}{b}\beta . e^{n-ne^x} - \frac{sin\,\frac{r}{b}x}{x} \cdot \frac{e^{-\frac{k}{b}x}\left(1-e^{-\frac{\beta}{b}ax}\right)}{1-e^{-\frac{a}{b}x}}\right\},$$

worin A und B dieselbe Bedeutung wie in Art. 9 haben.

Setzt man in der ersten und dritten dieser Gleichungen ax für x und in der zweiten und vierten bx für x, so ergibt sich:

$$\log P = \log A^2 - \frac{\alpha}{a}\left(k + \frac{\alpha-1}{2}b\right)\log n^2$$

$$+ 2\int_0^\infty \frac{\cos rx - 1}{x} \cdot \frac{e^{-kx}\,.\,(1-e^{-\alpha bx})}{(1-e^{-ax})(1-e^{-bx})}\,dx$$

$$\log Q = \log B^2 - \frac{\beta}{b}\left(k + \frac{\beta-1}{2}a\right)\log n^2$$

$$+ 2\int_0^\infty \frac{\cos rx - 1}{x} \cdot \frac{e^{-kx}\,(1-e^{-\beta ax})}{(1-e^{-ax})(1-e^{-bx})}\,dx$$

$$T = \int_0^\infty \frac{dx}{1-e^{-ax}}\left\{\alpha r\,.\,e^{n-ne^{ax}} - \frac{\sin rx}{x} \cdot \frac{e^{-kx}(1-e^{-\alpha bx})}{1-e^{-bx}}\right\}$$

$$S = \int_0^\infty \frac{dx}{1-e^{-bx}}\left\{\beta r\,.\,e^{n-ne^{bx}} - \frac{\sin rx}{x} \cdot \frac{e^{-kx}(1-e^{-\beta ax})}{1-e^{-ax}}\right\}.$$

Wenn man nun die erste und die zweite, sodann die dritte und die vierte dieser Gleichungen von einander abzieht und, wie in Art. 12 geschehen, voraussetzt, dass $a\beta = \alpha b$ sei, so ergibt sich:

$$\log\frac{P}{Q} = 2\log\frac{A}{B} + (\beta-\alpha)\log n$$

$$T - S = \frac{\alpha}{a}re^n\int_0^\infty dx\left\{\frac{ae^{-ne^{ax}}}{1-e^{-ax}} - \frac{be^{-ne^{bx}}}{1-e^{-bx}}\right\}$$

oder, wenn man die Werthe von $\log\frac{A}{B}$ und des übrig gebliebenen Integrals aus den Schlussgleichungen resp. der Art. 10 und 6 substituirt:

$$\log\frac{P}{Q} = (\alpha-\beta)\log\frac{2\pi}{n} + \left(2\frac{\alpha}{a}k + \alpha\beta - (\alpha+\beta)\right)\log\frac{a}{b}$$

$$T - S = \frac{\alpha}{a}r\log\frac{b}{a} = \frac{\beta}{b}r\log\frac{b}{a}\,.$$

Setzt man hierin die früheren Ausdrücke für P, Q, T, S ein und geht dann bei der ersten Gleichung von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erhält man unmittelbar die Gleichungen, durch welche der Satz des Art. 12 begründet erscheint.

14.

Aus den Gleichungen, welche gelegentlich dieser Demonstration erhalten worden sind, lassen sich leicht noch einige weitere Eigenschaften der Functionen Π und Θ ableiten.

Die beiden Endgleichungen des Art. 12 heissen, wenn man darin für $u^2 + v^2$ und $\frac{v}{u}$ die angenommene Bezeichnung setzt:

$$\frac{1}{2} \log \Pi_{(m,r)} = \log \frac{\Gamma(m)}{n^m} + \int_0^\infty \frac{e^{-mx}}{1-e^{-x}} \frac{\cos rx - 1}{x} dx$$

$$\operatorname{arctg} \Theta_{(m,r)} = \int_0^\infty \frac{dx}{1-e^{-x}} \left\{ r e^{n-ne^x} - e^{-mx} \frac{\sin rx}{x} \right\}.$$

Setzt man hierin $m + 1$ für m und zieht dann diese Gleichungen von den neu erhaltenen ab, so ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \log \frac{\Pi_{(m+1,r)}}{\Pi_{(m,r)}} = \log \frac{m}{n} + \int_0^\infty \frac{dx}{x} (1 - \cos rx) . e^{-mx}$$

$$\operatorname{arctg} \Theta_{(m+1,r)} - \operatorname{arctg} \Theta_{(m,r)} = \int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-mx} \sin rx.$$

Führt man die Integration nach den Formeln des Art. 2 aus, so erfolgt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} (1 - \cos rx) e^{-mx} = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{r^2}{m^2}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-mx} \sin rx = \operatorname{arctg} \frac{r}{m} .$$

Man erhält nun durch Substitution dieser Werthe die Gleichungen:

$$\Pi_{(m+1,r)} = \frac{m^2+r^2}{n^2} \Pi_{(m,r)}$$

$$\Theta_{(m+1,r)} = \frac{r + m\Theta_{(m,r)}}{m - r\Theta_{(m,r)}} .$$

Setzt man dagegen in den beiden allgemeinen Gleichungen, von welchen wir oben ausgegangen sind, $1 - m$ für m und $-r$ für r, so ergibt sich, wenn man jene Gleichungen zu den ihnen entsprechenden neuen addirt und bemerkt, dass Π eine gerade, Θ dagegen eine ungerade Function von r ist:

$$\frac{1}{2} \log \Pi_{(m,r)} \Pi_{(1-m,r)}$$

$$= \log \frac{\Gamma_{(m)} \Gamma_{(1-m)}}{n} + \int_0^\infty \frac{e^{-mx} + e^{(m-1)x}}{1-e^{-x}} \cdot \frac{\cos rx - 1}{x} dx$$

$$\operatorname{arctg} \Theta_{(m,r)} - \operatorname{arctg} \Theta_{(1-m,r)} = \int_0^\infty \frac{e^{(m-1)x} - e^{-mx}}{1-e^{-x}} \cdot \frac{\sin rx}{x} dx$$

oder, da: $\Gamma_{(m)} \Gamma_{(1-m)} = \frac{\pi}{\sin m\pi}$

so kann man diese Gleichungen nach einigen Transformationen in folgender Form schreiben:

$$\frac{1}{2} \log \Pi_{(m,r)} \Pi_{(1-m,r)}$$

$$= \log \frac{\pi}{n \sin m\pi} - \int_0^\infty \frac{e^{(2m-1)x} + e^{-(2m-1)x}}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{1 - \cos 2rx}{x} dx$$

$$\operatorname{arctg} \Theta_{(m,r)} - \operatorname{arctg} \Theta_{(1-m,r)} = \int_0^\infty \frac{e^{(2m-1)x} - e^{-(2m-1)x}}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{\sin 2rx}{x} dx.$$

Nun fand Poisson in dem „Mémoire sur la distribution de l'électricité . . ." (Mém. de l'Institut. Année 1811. 2e Partie) mittelst Reihenentwickelung die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^x - e^{-x}} \cdot \sin bx \,.\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{b\pi} - e^{-b\pi}}{e^{b\pi} + 2\cos a\pi + e^{-b\pi}}, \; - < a < +1.$$

Ich werde daraus, blos durch Integration nach b und a andere Formeln ableiten. Lässt man dabei jedesmal das Integral mit o anfangen, so wird man ohne Mühe finden:

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{1 - \cos bx}{x} dx = \frac{1}{2} \log \frac{e^{b\pi} + 2\cos a\pi + e^{-b\pi}}{2(1 + \cos a\pi)}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{\sin bx}{x} dx = \operatorname{arctg} \left(\frac{e^{b\pi} - 1}{e^{b\pi} + 1} \cdot \operatorname{tang} \frac{a\pi}{2}\right).$$

Es lassen sich also die beiden Integrale angeben, auf welche wir oben geführt worden sind. Setzt man nämlich

$$a = 2m - 1 \text{ und } b = 2r$$

und geht dann in der ersten Gleichung von den Logarithmen zu den Zahlen, in der zweiten dagegen von den Bogen zu den Tangenten über, so gelangt man zu den folgenden Relationen:

$$\Pi_{(m,r)}\,\Pi_{(1-m,r)} = \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}{e^{2r\pi}-2\cos 2m\pi+e^{-2r\pi}}$$

$$\frac{\Theta(m,r)-\Theta(1-m,r)}{1+\Theta(m,r)\,\Theta(1-m,r)} = \frac{1-e^{2r\pi}}{1+e^{2r\pi}}\cot g\, m\pi$$

welche so lange gelten, als $o < m < 1$ ist.

Wir fügen hier noch die Gleichungen bei, welche sich aus Art. 12 als specielle Fälle für $\alpha = a$, $\beta = b = 1$, $k = m\,a$ ergeben. Setzt man ausserdem noch ra an die Stelle von r, so erhält man jene beide Gleichungen in der folgenden Form:

$$\Pi_{(m,r)}\,\Pi\left(m+\frac{1}{a},r\right)\Pi\left(m+\frac{2}{a},r\right)\ldots\Pi\left(m+\frac{a-1}{a},r\right)$$
$$=\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{a-1}\cdot a^{1-2ma}\,\Pi_{(ma,ra)}$$

$$arctg\,\Theta(m,r)+arctg\,\Theta\left(m+\frac{1}{a},r\right)+arctg\,\Theta\left(m+\frac{2}{a},r\right)+\ldots$$
$$+\,arctg\,\Theta\left(m+\frac{a-1}{a},r\right)=arctg\,\Theta(ma,ra)-ra\log a$$

worauf wir alsbald zurück kommen werden.

15.

Die Function Π lässt sich für einige specielle Werthe von m näher bestimmen. Setzt man in der ersten der soeben erhaltenen Gleichungen $m = \frac{1}{2}$, so ergibt sich:

$$\Pi\left(\frac{1}{2},r\right)=\frac{1}{n}\,\frac{2\pi}{e^{r\pi}+e^{-r\pi}}.$$

Ausserdem lässt sich leicht zeigen, dass jene Function für alle positiven ganzen Zahlenwerthe von m gefunden werden kann. Setzt man zu dem Ende zunächst $m = 1$, so folgt:

$$\frac{1}{2}\log\Pi_{(1,r)} = -\log n-\int_0^\infty\frac{1-\cos rx}{e^x-1}\cdot\frac{dx}{x}.$$

Man kann das letztere Integral aus einem andern ableiten, welches Poisson am oben angeführten Orte fand, und wonach

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x-1}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\pi\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}} - \frac{1}{a}\right\}.$$

Integrirt man diese Gleichung nach a, von o angefangen, so ergibt sich:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{e^x-1}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\log\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{2a\pi}.$$

Setzt man also $a=r$, substituirt dann den Integralwerth in die obige Formel und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so findet man:

$$\Pi_{(1,r)} = \frac{1}{n^2}\frac{2r\pi}{e^{r\pi}-e^{-r\pi}}.$$

Dies vorausgesetzt wollen wir in der oben erhaltenen Gleichung:

$$\Pi_{(m+1,r)} = \frac{m^2+r^2}{n^2}\Pi_{(m,r)}$$

der Ordnung nach 1, 2, 3, . . . $m-1$ für m setzte und dann alle entsprechenden Gleichungen mit einander multipliciren.

Man erhält daraus das folgende Resultat:

$$\Pi_{(m,r)}$$

$$= \frac{1}{n^{2m}}\cdot(r^2+1^2)(r^2+2^2)\ldots(r^2+(m-1)^2)\cdot\frac{2r\pi}{e^{r\pi}-e^{-r\pi}}.$$

Setzt man dagegen $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots \frac{2m-1}{2}$ für m, multiplicirt abermals die entstehenden Gleichungen in einander, so findet man die weitere Bestimmung:

$$\Pi\left(m+\frac{1}{2},r\right)$$

$$= \frac{1}{n^{2m+1}}\left(r^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(r^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)\cdots\left(r+\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\right)\frac{2\pi}{e^{r\pi}+e^{-r\pi}}.$$

Für $m=o$ erhält man ferner:

$$\Pi_{(o,r)} = \frac{n^2}{r^2}\Pi_{(1,r)}$$

oder, wenn man den Werth von $\Pi_{(1,r)}$ einsetzt:

$$\Pi_{(o,r)} = \frac{1}{r}\,\frac{2\pi}{e^{r\pi}-e^{-r\pi}}\,.$$

Schliesslich wollen wir in der, Art. 14, für die Π Function gefundenen Gleichung setzen:

$$m = o,$$

so geht jene Gleichung über in die folgende:

$$\Pi\left(\frac{1}{a}, r\right)\Pi\left(\frac{2}{a}, r\right)\Pi\left(\frac{3}{a}, r\right)\ldots\Pi\left(\frac{a-1}{a}, r\right) = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{a-1}\cdot\frac{e^{r\pi}-e^{-r\pi}}{e^{ra\pi}-e^{-ra\pi}}\,.$$

Setzt man hierin $a = 2$, so ergibt sich für $\Pi\left(\frac{1}{2}, r\right)$ der oben gefundene Ausdruck wieder, wodurch die Resultate verificirt sind.

16.

Die Function Π lässt sich ferner in ein unendliches Product entwickeln. Wenn man nämlich in der Gleichung:

$$\frac{1}{2}\log\Pi_{(m,r)} = \log\frac{\Gamma_{(m)}}{n^m} + \int_o^\infty \frac{e^{-mx}}{1-e^{-x}}\cdot\frac{\cos rx - 1}{x}\,dx$$

das rechter Hand stehende Integral unter der Form:

$$\int_o^\infty \frac{\cos rx - 1}{x}\left\{e^{-mx} + e^{-(m+1)x} + e^{-(m+2)x} + \cdots\right\}dx$$

betrachtet, und berücksichtiget, dass vermöge einer in Art. 2 entwickelten Formel:

$$\int_o^\infty \frac{\cos rx - 1}{x}\cdot e^{-(m+s)x}\cdot dx = \frac{1}{2}\log\frac{(m+s)^2}{r^2+(m+s)^2}$$

so wird man, durch wiederholte Anwendung der letztern und wenn man schliesslich von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht, die folgende, stets convergirende Darstellung durch ein unendliches Product erhalten:

$$\Pi_{(m,r)} = \left(\frac{\Gamma_{(m)}}{n^m}\right)^2\cdot\frac{m^2}{r^2+m^2}\cdot\frac{(m+1)^2}{r^2+(m+1)^2}\cdot\frac{(m+2)^2}{r^2+(m+2)^2}\cdots$$

Es ist indessen nicht schwer eine Reihenentwickelung hierfür anzugeben, wenn man vorher bemerkt hat, dass sich die Function Π in ganz anderer Weise als bisher vorausgesetzt wurde, durch ein einziges bestimmtes Integral darstellen lässt. Das Euler'sche Integral erster Art hat die Form:

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Man setze hierin $t = ne^x$

und $a = m + r\sqrt{-1}$, $b = m - r\sqrt{-1}$

so wird man alsbald die Gleichung finden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos rx + \sqrt{-1}\sin rx}{\left(e^{-\frac{1}{2}x} + ne^{\frac{1}{2}x}\right)^{2m}}\,dx = \frac{1}{n^{m+r\sqrt{-1}}} \cdot \frac{\Gamma(m+r\sqrt{-1})\,\Gamma(m-r\sqrt{-1})}{\Gamma(2m)}.$$

Behufs der Trennung des Reellen von dem Imaginären bemerke man des Weitern, dass mit Rücksicht auf die in Art. 12 eingeführten Bezeichnungen:

$$u + v\sqrt{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(m+r\sqrt{-1})x - ne^x}\,dx = \int_0^\infty \frac{t^{(m+r\sqrt{-1})-1} \,.\, e^{-t}}{n^{m+r\sqrt{-1}}}\,dt;$$

oder also es ist:

$$\Gamma(m+r\sqrt{-1}) = (u + v\sqrt{-1}) \,.\, n^{m+r\sqrt{-1}}$$

$$\Gamma(m-r\sqrt{-1}) = (u + v\sqrt{-1}) \,.\, n^{m-r\sqrt{-1}}$$

woraus folgt:

$$\Gamma(m+r\sqrt{-1})\,\Gamma(m-r\sqrt{-1}) = n^{2m}(u^2+v^2) = n^{2m}\,\Pi(m,r).$$

Man hat daher die beiden folgenden Relationen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos rx\,dx}{\left(e^{-\frac{1}{2}x} + ne^{\frac{1}{2}x}\right)^{2m}} = + n^m \cos(r \log n) \,.\, \frac{\Pi(m,r)}{\Gamma(2m)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin rx\,dx}{\left(e^{-\frac{1}{2}x} + ne^{\frac{1}{2}x}\right)^{2m}} = - n^m \sin(r \log n) \,.\, \frac{\Pi(m,r)}{\Gamma(2m)},$$

durch welche also die beiden Integrale auf die Function Π zurückgeführt sind. — Rücksichtlich der erwähnten Reihenentwickelung wollen wir uns nur mit dem erstern beschäftigen. Die Function unter dem Integralzeichen ist eine gerade Function, man kann also auch schreiben:

$$\Pi_{(m,r)} = \frac{2\,\Gamma_{(2m)}}{n^m \cos(r \log n)} \cdot \int_0^\infty \frac{\cos rx}{(e^{-\frac{1}{2}x} + n e^{\frac{1}{2}x})^{2m}}\, dx$$

Da nun:

$$\frac{e^{-mx} \cos rx}{(n+e^{-x})^{2m}}$$

$$= \frac{1}{n^{2m}} \left\{ e^{-mx} - \frac{2m}{1.n} e^{-(m+1)x} + \frac{2m(2m+1)}{1.2.n^2} e^{-(m+2)x} - \dots \right\} \cos rx$$

so folgt, wenn man jedes Glied dieser Entwickelung nach der bekannten Formel zwischen den Grenzen o und ∞ integrirt und das Ergebniss dann in die vorhergehende Formel einsetzt, die gedachte Reihe in der Form:

$$\Pi_{(m,r)} =$$

$$\frac{2\Gamma_{(2m)}}{n^{3m}\cos(r \log n)} \left\{ \frac{m}{r^2+m^2} - \frac{2m}{1.n} \cdot \frac{m+1}{r^2+(m+1)^2} + \frac{2m(2m+1)}{1.2.n^2} \cdot \frac{m+2}{r^2+(m+2)^2} - \dots \right\}$$

Was die Giltigkeit dieser Reihe betrifft, so convergirt sie offenbar so lange m nicht grösser und n nicht kleiner als die Einheit ist. — Setzt man $m = 1$ und substituirt für $\Pi_{(1,r)}$ den in Art. 15 gefundenen Werth, so erhält man noch die bemerkenswerthe Reihensummirung:

$$\frac{1}{r^2+1^2} - \frac{1}{n} \cdot \frac{2^2}{r^2+2^2} + \frac{1}{n^2} \frac{3^2}{r^2+3^2} - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{4^2}{r^2+4^2} + \dots$$

$$= \frac{nr\pi \cos(r \log n)}{e^{r\pi} - e^{-r\pi}}.$$

Man kann ihr eine andere Form geben, wenn man sie von der Gleichung:

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \dots = \frac{n}{1+n}$$

abzieht. Es ergibt sich dann:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^2+1^2} - \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{r^2+2^2} + \frac{1}{n^3} \frac{1}{r^2+3^2} - \frac{1}{n^4} \frac{1}{r^2+4^2} + \dots$$

$$= \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{1+n} - \frac{r\pi \cos(r \log n)}{e^{r\pi} - e^{-r\pi}} \right\}.$$

Setzt man behufs der Verification $n = 1$, so ergibt sich die Euler'sche Reihe, welcher in Art. 5 Erwähnung geschah und welche also nur einen speciellen Fall der oben gefundenen darstellt.

17.

Die Ausdrücke $log\, \Pi_{(m,r)}$ und $arctg\, \Theta_{(m,r)}$ besitzen ferner die Eigenschaft, dass sie, nach m zwischen den Grenzen 0 und 1 integrirt, einen ganz durch elementare Functionen darstellbaren Werth annehmen. Dies ist selbst dann noch der Fall, wenn man an die Stelle von m den Ausdruck $a+x$ setzt und bei der Integration nur x als veränderlich betrachtet.

In der That hat man aus dem Frühern die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 log\, \Pi_{(a+x,r)}\, dx = -log\, n\,.\int_0^1 (a+x)\, dx$$

$$+\int_0^1 log\, \Gamma_{(a+x)}\, dx - \int_0^\infty e^{-ay}\frac{1-cos\, ry}{1-e^{-y}}\cdot\frac{dy}{y}\int_0^1 e^{-xy}\, dx$$

oder nach einigen Abkürzungen:

$$-\left(a+\frac{1}{2}\right) log\, n + \int_0^1 log\, \Gamma_{(a+x)}\, dx - \int_0^\infty e^{-ay}\frac{1-cos\, ry}{y^2}\, dy.$$

Der Werth des letztern Integrals ist in Art. 2 unmittelbar gegeben; führt man denselben ein und multiplicirt die Gleichung durchgehends mit 2, so findet man:

$$\int_0^1 log\, \Pi_{(a+x,r)}\, dx = -(2a+1)\, log\, n$$

$$+a\, log\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right) - 2\, r\, arctg\,\frac{r}{a} + 2\int_0^1 log\, \Gamma_{(a+x)}\, dx.$$

Die Werthbestimmung des allein noch übrig gebliebenen Integrals rührt von Herrn Professor Raabe her und bildet den Gegenstand zweier Abhandlungen desselben im 25. und 28. Band des Journals von Crelle. Es scheint nicht ohne Interesse, zu zeigen, wie man durch eine etwas verschiedene Betrachtungsweise viel schneller zum Resultate gelangen kann. Bezeichnen i und μ zwei positive ganze Zahlen, so hat man zufolge des in Art. 11 begründeten Gauss'schen Theorems die Gleichung:

$$\sum_{o}^{\mu-1} log\,\Gamma\left(a+\frac{i}{\mu}\right) = \left(\frac{1}{2}-\mu a\right) log\,\mu + \frac{\mu-1}{2}\, log\, 2\pi + log\,\Gamma_{(\mu a)}.$$

Multiplicirt man diese mit $\frac{1}{\mu}$ und setzt:

$$\frac{i}{\mu} = x \quad , \quad \frac{i+1}{\mu} = x + \Delta x,$$

folglich

$$\frac{1}{\mu} = \Delta x,$$

so geht sie über in die folgende:

$$\sum_{o}^{1-\frac{1}{\mu}} log\,\Gamma_{(a+x)} \,.\, \Delta x = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mu}\right) log\, 2\pi + \frac{1}{\mu}\left(log\,\Gamma_{(\mu a)} - \mu a\, log\,\mu\right) + \frac{1}{2\mu}\, log\,\mu$$

Lässt man nun μ unendlich gross werden, so geht Δx in dx und die Summe linker Hand in ein bestimmtes Integral über, das letzte Glied rechter Hand verschwindet und man hat:

$$\int_{o}^{1} log\,\Gamma_{(a+x)}\, dx = \frac{1}{2}\, log\, 2\pi + \left[\frac{log\,\Gamma_{(\mu a)} - \mu a\, log\,\mu}{\mu}\right]_{\mu=\infty}.$$

Da nun, nach früheren Ergebnissen:

$$log\,\Gamma_{(\mu a)} = \int_{o}^{\infty}\frac{dx}{x}\left\{(\mu a - 1)\, e^{-x} - \frac{e^{-x}-e^{-\mu a x}}{1-e^{-x}}\right\}$$

und

$$log\,\mu = \int_{o}^{\infty}\frac{dx}{x}\left(e^{-x}-e^{-\mu x}\right),$$

so folgt:

$$\frac{log\,\Gamma_{(\mu a)} - \mu a\, log\,\mu}{\mu} = \int_{o}^{\infty}\frac{dx}{x}\left\{a\, e^{-\mu x} - \frac{1}{\mu}\, e^{-x} - \frac{1}{\mu}\,\frac{e^{-x}-e^{-\mu a x}}{1-e^{-x}}\right\}.$$

Je grösser der Werth von μ ist, um so näher kommt jedes Glied des Ausdruckes unter dem Integralzeichen der Null und zwar in einem um so stärkern Grade, je mehr x von Null verschieden ist. Lässt man μ ohne Ende wachsen, so wird also die Summe jener Glieder, und folglich auch das Element des Integrals, nur für solche sehr kleine Werthe von x einen von Null verschiedenen Werth

annehmen, für welche $\mu . x$ nicht unendlich gross wird. — Mit Rücksicht auf diese Bemerkung erscheint es zweckmässig, e^{-x} wo solches in dem gedachten Ausdrucke vorkommt, in eine Reihe zu entwickeln, von welcher alsdann, da nur verschwindend kleine Werthe von x in Betracht kommen, auch nur die beiden ersten Glieder zusammen, nämlich $1 - x$, von Einfluss sein werden. Hiernach betrachte man das obige Integral in der Form:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ a e^{-\mu x} - \frac{1 - e^{-\mu a x}}{\mu x} + \frac{x}{\mu} + \cdots \right\},$$

setze x für $\mu . x$ und, wenn dies geschehen, $\mu = \infty$, so erhält man:

$$\left[\frac{log \, \Gamma_{(\mu . a)} - \mu . a \, log \, \mu}{\mu} \right]_{\mu = \infty} = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left(a e^{-x} - \frac{1 - e^{-ax}}{x} \right).$$

Der Werth dieses Integrals lässt sich aus Art. 2 unmittelbar entnehmen, und ist

$$= a \, log \, a - a.$$

Dies vorausgesetzt hat man also, wie Herr Raabe fand, die Gleichung:

$$\int_0^1 log \, \Gamma_{(a+x)} \, dx = \frac{1}{2} \, log \, 2\pi + a \, log \, a - a$$

und folglich, wenn man dieses Ergebniss in die frühere Gleichung einsetzt:

$$\int_0^1 log \, \Pi_{(a+x, r)} \, dx$$

$$= log \, 2\pi - (2a + 1) \, log \, n + a \, log \, (a^2 + r^2) - 2a - arctg \, \frac{r}{a}.$$

Eine ähnliche Eigenschaft kommt dem Ausdruck $arctg \, \Theta_{(a+x, r)}$ zu, wie nun gezeigt werden soll.

Aus der letzten Gleichung des Art. 14 folgt, wenn man a für m und μ für a setzt:

$$\sum_0^{\mu - 1} arctg \, \Theta \left(a + \frac{i}{\mu}, r \right) = - r \mu \, log \, \mu + arctg \, \Theta_{(a\mu, r\mu)}$$

oder, wenn man mit $\frac{1}{\mu}$ multiplicirt und wieder

setzt: $\frac{i}{\mu} = x \quad , \quad \frac{1}{\mu} = \Delta x$

$$\sum_{0}^{1-\frac{1}{\mu}} arctg\, \Theta_{(a+x,r)}\, \Delta x = -r \log \mu + \frac{arctg\, \Theta_{(a\mu, r\mu)}}{\mu}.$$

Lässt man μ unendlich gross werden, so ergibt sich, ähnlich, wie im vorhin betrachteten Falle:

$$\int_0^1 arctg\, \Theta_{(a+x,r)}\, dx = \left[\frac{-r\mu \log \mu + arctg\, \Theta_{(a\mu, r\mu)}}{\mu}\right]_{\mu=\infty}.$$

Da nun zufolge früherer Formeln:

$$arctg\, \Theta_{(a\mu, r\mu)} = \int_0^\infty \frac{dx}{1-e^{-x}} \left\{ r\mu e^{n-ne^x} - e^{-a\mu x} \frac{\sin r\mu x}{x} \right\}$$

$$r\mu \log \mu = \int_0^\infty \frac{dx}{1-e^{-x}} \left\{ r\mu e^{n-ne^x} - r\mu e^{\mu(n-ne^x)} \right\},$$

so hat man

$$\frac{-r\mu \log \mu + arctg\, \Theta_{(a\mu, r\mu)}}{\mu} = \int_0^\infty \frac{dx}{1-e^{-x}} \left\{ re^{\mu(n-ne^x)} - e^{-a\mu x}. \frac{\sin r\mu x}{\mu x} \right\}.$$

Lässt man nun auch hierin μ ohne Ende wachsen, so ist auf der Stelle klar, dass der Ausdruck unter dem Integralzeichen nur für beliebig kleine Werthe von x einen von Null verschiedenen Werth erhält, und dass demnach bei der Bildung des Integrals nur solche sehr kleine Werthe von x in Frage kommen können, für welche μx nicht verschwindet.

Auf diese Bemerkung gestützt kann man die beiden Potenzen e^{-x} und e^x nach der gewöhnlichen Form entwickeln, wobei auch hier nur die zwei ersten Entwickelungsglieder zu beachten sind. Das Integral geht dann über in:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ re^{-n\mu x} - e^{-a\mu x} \frac{\sin r\mu x}{\mu x} + \ldots \right\}$$

und man hat folglich, wenn x für μx und hierauf $\mu = \infty$ gesetzt wird, die Gleichung:

$$\left[\frac{-r\mu \log \mu + arctg\, \Theta_{(a\mu, r\mu)}}{\mu}\right]_{\mu=\infty} = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ re^{-nx} - e^{-ax} \frac{\sin rx}{x} \right\}$$

Der Werth dieses Integrals ist in Art. 2 gegeben, so dass man das weitere Resultat erhält:

$$\int_o^1 arctg\, \Theta_{(a+x,r)}\, dx = \frac{r}{2} \log \frac{a^2+r^2}{n^2} + a\, arctg \frac{r}{a} - r,$$

wodurch nun die im Eingange dieses Art. aufgestellte Behauptung erwiesen ist.

18.

Wenn sich zwischen den Functionen Π und Θ rücksichtlich der soeben und früher in Art. 12 begründeten Eigenschaften eine gewisse Analogie zeigt, so begegnet doch die Frage, ob Θ auch Eigenschaften besitze, welche den für Π in den Art. 14, 15 und 16 nachgewiesenen als parallel zu betrachten wären, einigen Schwierigkeiten, worauf ich bei einer andern Gelegenheit zurückkommen werde.

Zwischen den Functionen Π und Γ besteht zwar, wie wir gesehen, ein Zusammenhang, welchen das Imaginäre vermittelt, aber es ist gleichwohl die Function Π wesentlich allgemeiner als jene Γ: die erstere hängt von zwei ganz getrennten Constanten, die letztere dagegen nur von einer einzigen ab, und beide führen nur in dem besondern Falle, wenn $r = o$, vermöge der Gleichung

$$\Pi_{(m,o)} = \left(\frac{\Gamma(m)}{n^m}\right)^2$$

auf einander zurück, während im Übrigen, wie in dieser Abhandlung gezeigt worden ist, die Function Π alle jene interessanten Eigenschaften, nur in allgemeinerer Fassung, besitzt, durch welche die speciellere Gammafunction die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen hat.
